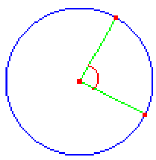
Géométrie

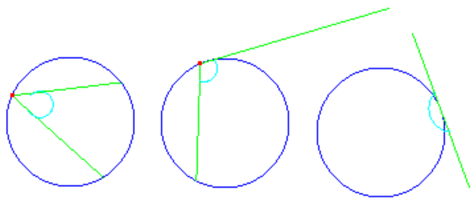
Quatrième partie **: Angles dans un cercle**

Nous allons voir différents angles dans un cercle.

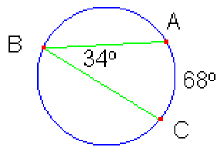
1. Angle au centre : Un angle au centre d'un cercle est un angle dont le sommet est situé au centre du cercle.



2. Angle inscrit : un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés sont sécants ou tangents au cercle.

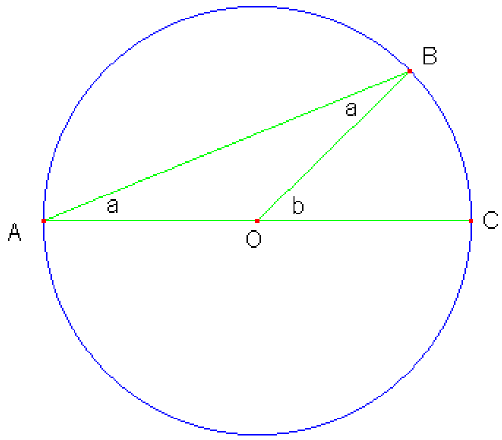


3. Théorème des angles inscrits : un angle inscrit mesure en degrés la moitié de l'arc qu'il intercepte.



$$\boxed{\text{L'angle } ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}}$$

Démonstration :



Le triangle BOA est isocèle donc les angles BAO et ABO sont congrus.

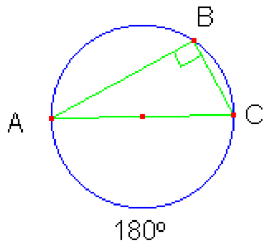
L'angle BOC est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents du triangle.

Donc, $b = 2a$

L'arc $\overparen{BC}$ mesure 2a

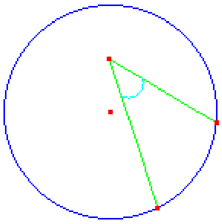
Alors, l'angle BAC mesure $\frac{1}{2}\overparen{BC}$

4. Corollaire du théorème des angles inscrits : un angle inscrit qui intercepte un demi-cercle est un angle droit.

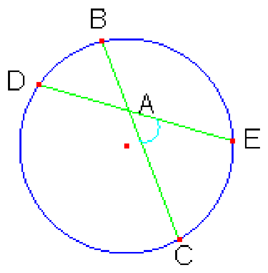


Le triangle ABC est rectangle en B

5. Angle intérieur : un angle intérieur d'un cercle est un angle dont le sommet est situé à l'intérieur du cercle.

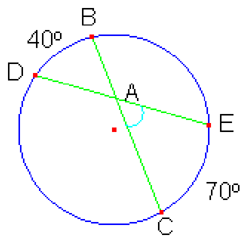


6. Théorème des angles intérieurs : La mesure en degré d'un angle intérieur est égale à la moitié de la somme des arcs interceptés par ses côtés et par les prolongements de ses côtés.



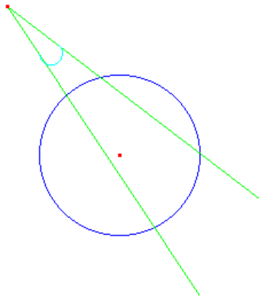
L'angle CAE $= \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{CE} + m\overset{\frown}{BD})$

Exemple :

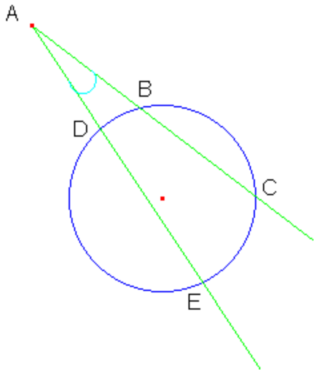


L'angle CAE $= \frac{1}{2}(70^{o} + 40^{o}) = 55^{o}$

7. Angles extérieurs : un angle extérieur d'un cercle est un angle dont le sommet est situé à l'extérieur du cercle et dont les côtés sont sécants ou tangents au cercle.

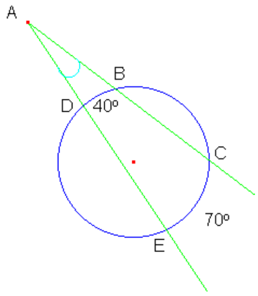


8. Théorème des angles extérieurs : la mesure en degré d'un angle extérieur est égale à la moitié de la différence des arcs interceptés par ses côtés.



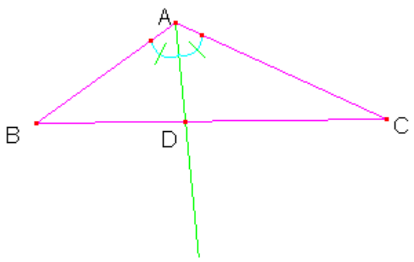
$$\text{L'angle EAC} = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{CE} - m\overset{\frown}{BD})$$

Exemple :



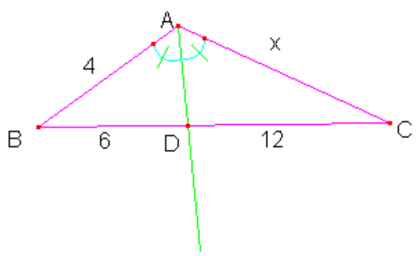
$$\text{L'angle EAC} = \frac{1}{2}(70^o - 40^o) = 15^o$$

9. Théorème de la bissectrice : la bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé en deux segments de longueurs proportionnelles à celles des côtés adjacents.



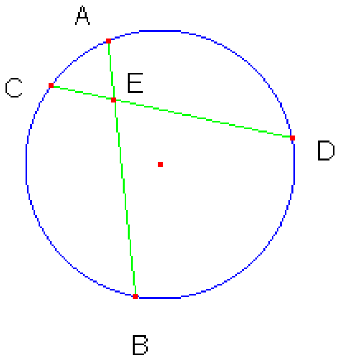
$$\frac{mAC}{mDC} = \frac{mAB}{mBD}$$

Exemple :



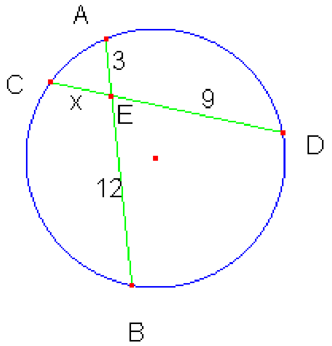
$$\frac{mAC}{mDC} = \frac{mAB}{mBD} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{4}{6} \Rightarrow x = 8$$

10. Théorème des cordes sécantes : lorsque deux cordes se coupent dans un cercle, le produit des mesures des segments de l'une est égal au produite des segments de l'autre.



mAE x mEB = mCE x mED

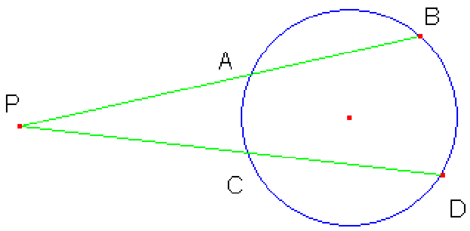
Exemple :



mAE x mEB = mCE x mED

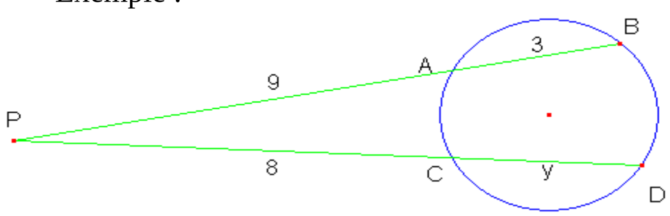
3 * 12 = x * 9 ➔ x = 4

11. Théorème du point extérieur : Si d'un point P extérieur à un cercle, on mène d'une part une sécante PB qui coupe le cercle en A et B, et d'autre part la sécante PD qui coupe le cercle en C et D, alors :



mPA x mPB = mPC x mPD

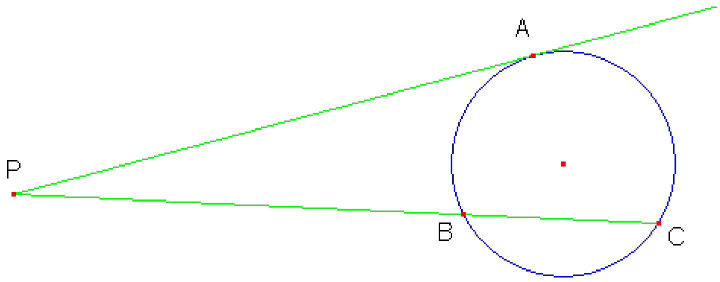
Exemple :



mPA x mPB = mPC x mPD

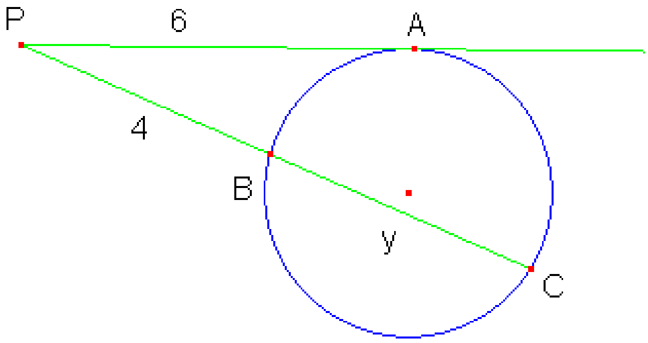
9 * 12 = 8 * (8+y)
108 = 8 * (8 + y)
13,5 = 8+ y
y = 5,5

12. Théorème de la puissance d'un point extérieur : Si d'un point P extérieur à un cercle, on mène d'une part une tangente PA au cercle, et d'autre part la sécante PC qui coupe le cercle en B et C, alors :



$(mPA)^2 = mPB \times mPC$

Exemple :



$(mPA)^2 = mPB \times mPC$

$6^2 = 4 * (4 + y)$
$36 = 4 * (4 + y)$
$9 = 4 + y$
$y = 5$