Opérations sur les vecteurs

Propriétés des opérateurs sur les vecteurs

Propriétés de l'addition de deux vecteurs.

L'addition de vecteurs possède les mêmes propriétés que l'addition de nombres réels.

1. L'addition de deux vecteurs donne un vecteur
   $\vec{u} = (4, 2)$
   $\vec{v} = (-2, 3)$
   $\vec{u} + \vec{v} = (4, 2) + (-2, 3) = (4+-2, 2+3) = (2, 5)$ Donne un vecteur.

2. L'addition de vecteur est commutative.
   $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

   Pour $\vec{u} = (4, 2)$ et $\vec{v} = (-2, 3)$
   $\vec{u} + \vec{v} = (4, 2) + (-2, 3) = (4+-2, 2+3) = (2, 5)$
   $\vec{v} + \vec{u} = (-2, 3) + (4, 2) = (2, 5)$

3. L'addition de vecteurs est associative
   $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

   Pour $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3)$ et $\vec{w} = (3, -6)$

   $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (4-2, 2+3)+(3, -5) = (2, 5) + (3, -6) = (5, -1)$
   $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (4, 2) + (-2+3, 3-6) = (4, 2) + (1, -3) = (5, -1)$

4. L'addition de vecteurs possède un élément neutre.
   Voici l'élément neutre $\vec{0} = (0, 0)$. L'élément neutre n'entraîne pas de modification à une addition de vecteurs.
   Si $\vec{u} =(a, b)$, alors $\vec{u} + \vec{0} =(a, b) + (0, 0) = (a, b) = \vec{u}$

5. Chaque vecteur a son opposé
   Soit $\vec{u} =(a, b)$, alors $-\vec{u} = (-a, -b)$
   $\vec{u} + -\vec{u} = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = \vec{0}$

<u>Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire</u>.

1. Le produit d'un vecteur par un scalaire est toujours un vecteur
   Pour $\vec{u} = (4, 2)$,
   $5\vec{u} = 5(4, 2) = (20, 10)$

2. L'associativité est vérifiée
   $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
   Pour $\vec{v} = (3, -4)$ et a=5 et b=2
   $5(2\vec{v}) = (5x2)\vec{v}$
   $5(2(3, -4) = (10)(3, -4)$
   $5(6, -8) = 10(3, -4)$
   $(30, -40) = (30, -40)$

3. Le scalaire 1 joue le rôle d'élément neutre.
   $1\vec{v} = \vec{v}$

   Pour $\vec{v} = (5, 2)$
   $1\vec{v} = 1(5, 2) = (5, 2)$

4. La distributivité sur l'addition de vecteurs
   $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

   Pour $\vec{u} = (3, -2)$, $\vec{v} = (-5, 4)$ et a = 6

   $a(\vec{u} + \vec{v}) = 6((3, -2) + (-5, 4)) = 6(3-5, -2+4) = 6(-2, 2) =$ **(-12, 12)**
   $a\vec{u} + a\vec{v} = 6(3, -2) + 6(-5, 4) = (18, -12) + (-30, 24) =$ **(-12, 12)**

5. La distributivité sur l'addition de scalaires
   $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

   Pour $\vec{v} = (5, -3)$, a = 3 et b = 4

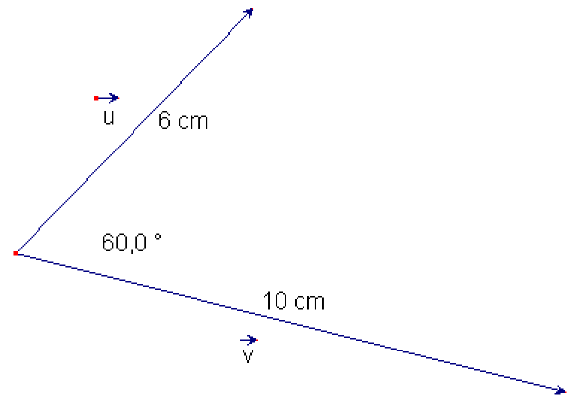
   $(a + b)\vec{v} = (3 + 4)(5, -3) = 7(5, -3) =$ **(35, -21)**
   $a\vec{v} + b\vec{v} = 3(5, -3) + 4(5, -3) = (15, -9) + (20, -12) =$ **(35, -21)**

<u>Propriétés de la multiplication scalaire de deux vecteurs</u>.

Le résultat sera un scalaire

1. La commutativité

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$



$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \bullet \|\vec{v}\| \cos 60^o$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 6 \bullet 10 \cos 60^o = 60 \bullet 1/2 = 30$

$\vec{v} \bullet \vec{u} = \|\vec{v}\| \bullet \|\vec{u}\| \cos 60^o$

$\vec{v} \bullet \vec{u} = 10 \bullet 6 \cos 60^o = 60 \bullet 1/2 = 30$

2. La distributivité sur l'addition de vecteurs

$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

Démontrons que les deux côtés de l'égalité donne le même résultat.

Prenons $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ et $\vec{w} = (e, f)$

$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = (a,b) \bullet ((c, d)+(e,f))$
$= (a, b) \bullet (c+e, d+f) = a(c+e) + b(d+f) = ac+ae+bd+bf$

$\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w} = (a, b) \bullet (c, d) + (a, b) \bullet (e, f)$
$= (ac + bd) + (ae + bf) = ac + ae + bd + bf$

3. L'associativité avec des scalaires

$k_1 \vec{u} \bullet k_2 \vec{v} = k_1 k_2 (\vec{u} \bullet \vec{v})$

Prenons $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$

$k_1 \vec{u} \bullet k_2 \vec{v} = k_1(a, b) \bullet k_2(c, d) = (k_1a, k_1b) \bullet (k_2c, k_2d)$
$= (k_1a \bullet k_2c + k_1b \bullet k_2d) = k_1k_2ac + k_1k_2bd$
$= k_1k_2(ac + bd) = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$