# Exemple avec explications supplémentaires

Notre club de vélo de montagne est en campagne de recrutement. Il s'adresse aussi bien aux adultes qu'aux jeunes d'âges mineurs. Le club s'attend à obtenir un minimum de 15 adultes et de 30 jeunes. On s'attend aussi à obtenir au moins 45 jeunes de plus que d'adultes. Dû à la quantité d'entraîneurs à notre disposition, nous devons limités les inscriptions à 135 membres. En sachant que le coût d'inscription pour un adulte est de 50$ et qu'il est de 40$ pour un jeune, quel est le revenu maximal que nous pouvons espérer cette année?

## Étape 1 :

Il faut identifier les variables x et y. Ensuite, il faut créer les contraintes.

x : un cycliste adulte
y : un jeune cycliste

$x \geq 0$
$y \geq 0$
(1) $x \geq 15$ (un minimum de 15 adultes)
(2) $y \geq 30$ (un minimum de 30 jeunes)
(3) $y \geq x + 45$ (au moins 45 jeunes de plus que d'adultes)
(4) $x + y \leq 135$ (limités les inscriptions à 135 membres)

## Étape 2 :

Il s'agit de traduire toutes les contraintes dans un plan cartésien. À l'aide des inégalités, on repère le polygone de contraintes qui contient toutes les parties ombragées de chacune des contraintes.

Reprenons les inégalités et isolons la variables y.

$x \geq 0$
$y \geq 0$
(1) $x \geq 15$
(2) $y \geq 30$
(3) $y \geq x + 45$
(4) $x + y \leq 135$ devient $y \leq 135 - x$

Maintenant, commençons à tracer les droites.

$x \geq 0$
$y \geq 0$

| Ces deux inéquations veulent dire que l'on sera dans le premier quadrant |
|---|

ÉQUATION (1) $x \geq 15$ droite verticale à partir de 15. Toutes les valeurs supérieures à 15 seront considérées.

ÉQUATION (2) $y \geq 30$ droite horizontale à partir de 30. Toutes les valeurs supérieures à 30 seront considérées.
ÉQUATION (3) $y \geq x + 45$. Comme il y a deux variables, nous allons faire une table des valeurs. Pour ce faire, il suffit de remplacer temporairement l'inégalité par une égalité.

| x | y = x + 45 |
|---|---|
| 0 | 45 |
| 15 | 60 |
| 30 | 75 |

Par la suite, pour trouver la zone ombragée, il y a deux méthodes.

1. Prendre un point quelconque et valider l'inéquation.
   Le point (0,0) est en-dessous de la droite
   $y \geq x + 45 \Rightarrow 0 \geq 0 + 45 \Rightarrow 0 \geq 45 \Rightarrow$ C'est FAUX
   Donc, la partie ombragée sera au-dessus de la droite.
2. Analyser la variable y
   Une fois la variable y isolée, c'est plus facile de faire une table des valeurs. De plus, le symbole de l'inégalité nous dira rapidement où se situe la zone ombragée. Dans ce cas-ci, on dit que « y est plus grand ou égal ». Les valeurs de y qui sont plus grandes sont situées vers le haut du graphique. Donc, la zone ombragée sera au-dessus de la droite.

ÉQUATION (4) $y \leq 135 - x$. Comme il y a deux variables, nous allons faire une table des valeurs. Pour ce faire, il suffit de remplacer temporairement l'inégalité par une égalité.

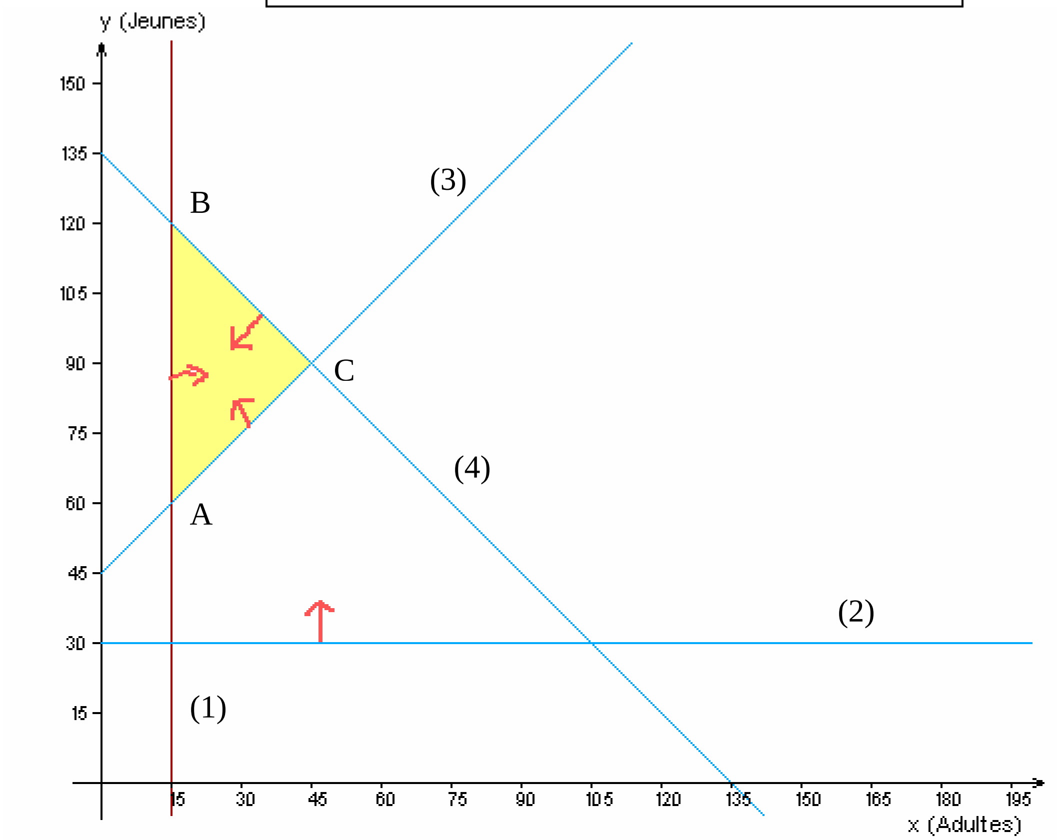
| X | y = 135 - x |
|---|---|
| 0 | 135 |
| 15 | 120 |
| 30 | 105 |

Par la suite, pour trouver la zone ombragée, il y a deux méthodes.

1. Prendre un point quelconque et valider l'inéquation.
   Le point (0,0) est en dessous de la droite
   $y \leq 135 - x \Rightarrow 0 \leq 135 - 0 \Rightarrow 0 \leq 135 \Rightarrow$ C'est VRAI
   Donc, la partie ombragée sera en dessous de la droite.
2. Analyser la variable y
   Une fois la variable y isolée, c'est plus facile de faire une table des valeurs. De plus, le symbole de l'inégalité nous dira rapidement où se situe la zone ombragée. Dans ce cas-ci, on dit que « y est plus petit ou égal ». Les valeurs de y qui sont plus petites sont situées vers le bas du graphique. Donc, la zone ombragée sera en dessous de la droite.

Ainsi, le polygone de contrainte sera situé là où toutes les zones ombragées se superposent.

Nombres d’inscriptions entre adultes et jeunes




## Étape 3 :

Les sommets du polygone de contraintes détermineront la valeur minimale ou maximale de la fonction à optimiser. La méthode de comparaison sera utile pour trouver certains sommets.

À partir du polygone de contrainte, on considère tous les sommets.
Pour ce faire, nous avons besoin, dans certains cas, d’utiliser la méthode de comparaison d’où l’importance d’avoir isolé la variable y à l’étape 2.

Pour trouver les sommets, on va travailler avec l’égalité.

Sommet A :
C’est le point d’intersection entre les contraintes (1) et (3).
Donc, si $x=15$, alors $y = x + 45 \Rightarrow y = 15 + 45 \Rightarrow y = 60$
Le sommet sera la coordonnée (15, 60)

Sommet B :
C’est le point d’intersection entre les contraintes (1) et (4).
Donc, si $x=15$, alors $y = 135 – x \Rightarrow y = 135 – 15 \Rightarrow y = 120$
Le sommet sera la coordonnée (15, 120)

Sommet C :
C’est le point d’intersection entre les contraintes (3) et (4).
$y = x + 45$
$y = 135 – x$
Utilisons la méthode de comparaison.
$x + 45 = 135 – x$ ➔ $x + x = 135 – 45$ ➔ $2x = 90$ ➔ $x = 45$
Remplaçons x=45 dans une des deux équations
$y = x + 45$ ➔ $y = 45 + 45$ ➔ $y = 90$
Le sommet sera la coordonnée (45, 90)

## Étape 4 :

Il s'agit de formuler une équation qui permettra de calculer les valeurs, à l’aide des sommets trouver à l’étape 3, et ainsi répondre à la question du problème.

On veut le revenu maximal.
$M = 50x + 40y$

## Étape 5 :

Dans un tableau, on utilisera la fonction à optimiser et on effectuera un calcul pour chaque sommets trouver à l’étape 3.

| Sommets | Fonction à optimiser : M = 50x + 40y |
|---|---|
| (15, 60) | 3150$ |
| (15, 120) | 5550$ |
| (45, 90) | 5850$ |

## Étape 6 :

L’étape 5 nous donnera les calculs effectués pour chaque sommet. On retrouvera une valeur minimale et une valeur maximale qui servira à répondre au problème selon le contexte.

On veut le revenu maximal. Donc, ce sera 5850$.

Réponse : Pour obtenir le revenu maximal, il faudra 45 inscriptions chez les adultes et 90 inscriptions chez les jeunes.