

Généralité

Définition: Toute fonction logarithmique est la réciproque d'une fonction exponentielle.

Relation entre la forme exponentielle et la forme logarithmique.

Forme exponentielle

$$x = C^Y$$

x : Puissance

C : Base

y : Exposant

Forme logarithmique

$$y = \log_c x$$

x : Argument

C : Base

y : Logarithme

$y = \log_c x$ se lit comme suit : le logarithme de X à la base c.

Bref, le logarithme de $y = \log_c x$ est l'exposant qu'il faut donner à C pour obtenir la valeur x.

Base

Les deux bases les plus utilisées

1- La base 10.

- a. Le logarithme décimal en base 10 s'écrit $\log_{10} N$.
- b. Il peut s'écrire $\log N$. On omet d'écrire la base lorsqu'elle est 10.

2- La base e.

- a. Le nombre irrationnel e vaut approximativement 2,7182818284.
- b. Le logarithme naturel dont la base est e s'écrit \ln .
- c. \ln peut aussi s'écrire \log_e .

Exercice:

Trouvez x.

1. $\log_2 32 = x$
2. $\log_3 81 = x$
3. $\log_{1/2} 8 = x$

Solution:

Transformer en équation exponentielle

1. $2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x=5$
2. $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x=4$
3. $(1/2)^x = 8 \Rightarrow (1/2)^x = 2^3 \Rightarrow (1/2)^x = (1/2)^{-3} \Rightarrow x = -3$

Loi du logarithme

1- Loi du logarithme d'un produit.

$$\text{Log}_a MN = \text{Log}_a M + \text{Log}_a N$$

2- Loi du logarithme d'un quotient

$$\text{Log}_a M/N = \text{Log}_a M - \text{Log}_a N$$

3- Loi du logarithme d'une puissance

$$\text{Log}_a M^N = N\text{Log}_a M$$

4- Loi du changement de base

$$\text{Log}_c M = \frac{\text{Log}_s M}{\text{Log}_s C}$$

En général, la valeur de s sera 10 car on pourra se servir de la calculatrice.

Les trois premières lois sont aussi valables pour ln.

Exercice:

Écrire sous forme logarithmique sans exposant et sans fraction.

1- $\log_6 6x7 =$

2- $\log_7 42/23 =$

3- $\log_4 6^3 =$

4- $\log_3 5 + \log_3 8 =$

Solutions :

1- $\log_6 6 + \log_6 7$

2- $\log_7 42 - \log_7 23$

3- $3x \log_4 6$

4- $\log_3 5 \times 8 = \text{Log}_3 40$

Résolution d'une équation exponentielle

On va se servir de ceci

Pour $m > 0$ et $n > 0$

$$m = n \Rightarrow \log_c m = \log_c n$$

Autrement dit, on met un \log_{10} à gauche et à droite de l'équation lorsque l'on veut résoudre une équation car la calculatrice considère seulement la base 10 pour le log.

De façon générale, la méthode de résolution d'une équation exponentielle à une variable consiste à:

- 1- Ramener l'équation exponentielle à l'égalité des 2 membres strictement positif
- 2- Appliquer la propriété $m = n \Rightarrow \log_c m = \log_c n$ avec $c=10$.
- 3- Appliquer les lois des logarithmes et des équations pour isoler la variable.

Exemple:

$$3^{x-4} + 3 = 30$$

Voici les étapes.

1. $3^{x-4} = 27$
2. $\log 3^{x-4} = \log 27$ (en base 10)
3. $(x-4)\log 3 = \log 27$

$$(x-4) = \log 27 / \log 3$$

$$(x-4) = 3 \text{ (après avoir utilisé la calculatrice pour trouver le terme de droite)}$$

$$x = 7$$

Réciproque

La réciproque d'une fonction logarithmique est une fonction exponentielle.

$$f(x) = \log_7 x$$

$$y = \log_7 x \quad \text{Car } f(x) = y$$

$$x = \log_7 y \quad \text{On intervertit les variables}$$

$$7^x = y \quad \text{On écrit sous forme exponentielle}$$

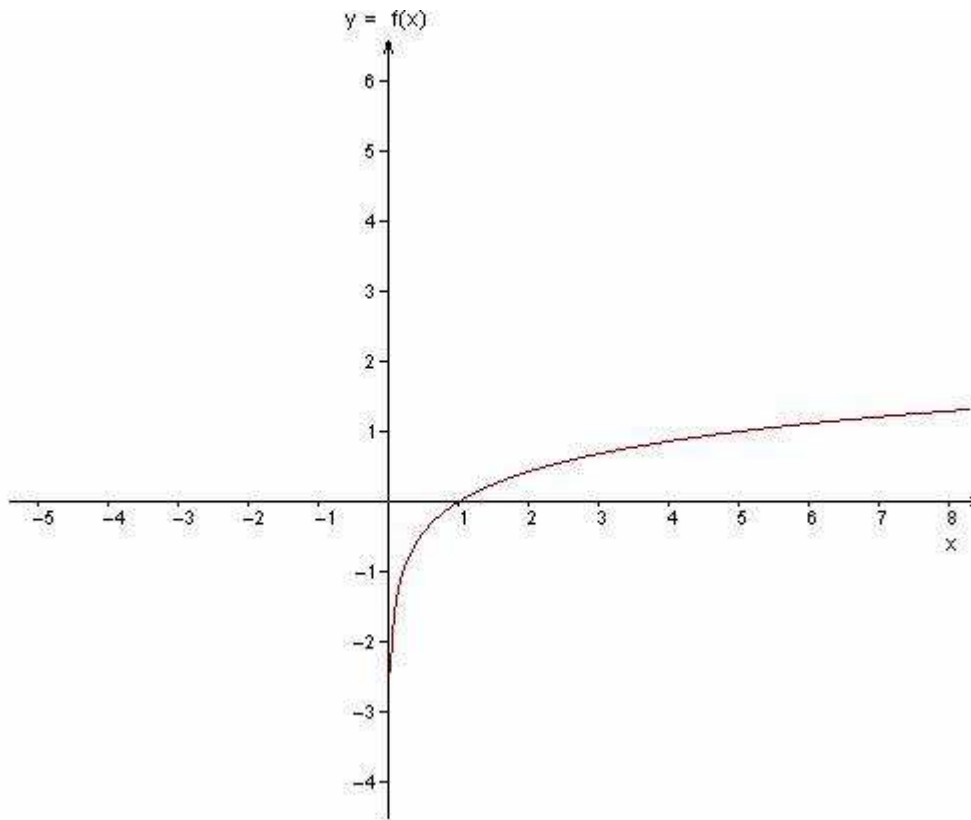
$$\text{Alors, } f(x)^{-1} = 7^x$$

Graphique

Pour $y = \log_c x$

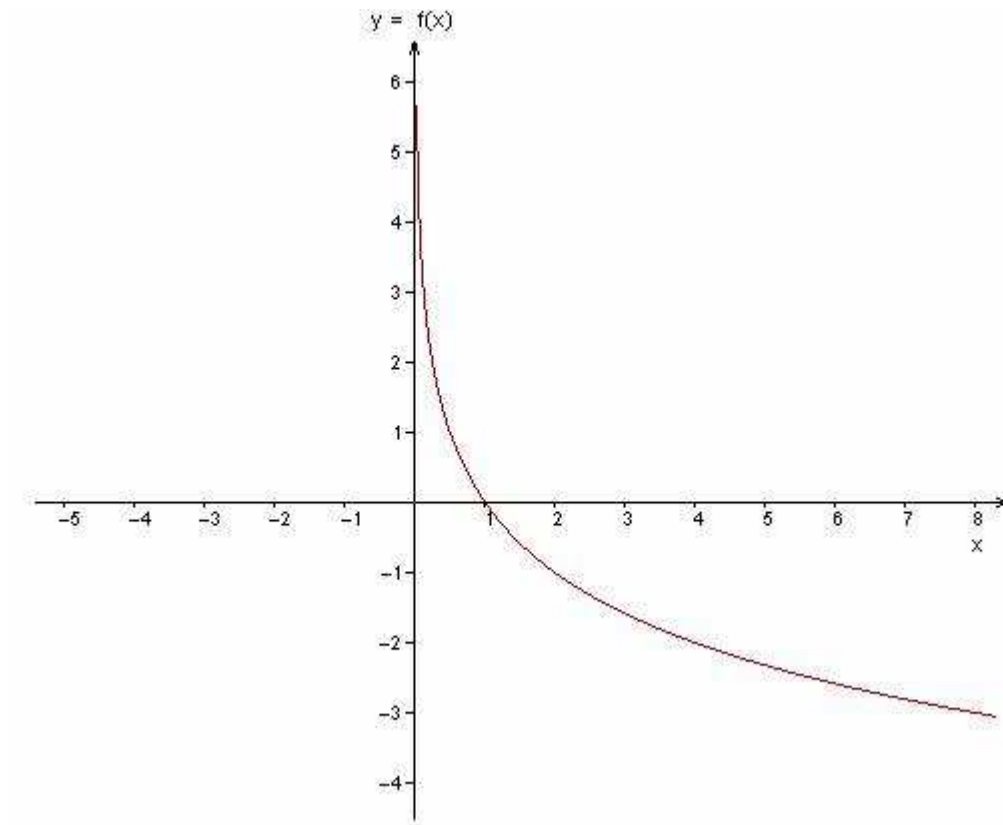
Si $c > 1$, la fonction sera croissante.

Par exemple, dans le graphique ci-dessous, $c = 5$.



Si $0 < c < 1$, la fonction sera décroissante.

Par exemple, dans le graphique ci-dessous, $c = 1/2$



Première observation

Le logarithme de 1 est 0.

$$\log_c 1 = 0 \text{ car } c^0 = 1$$

Coordonnée (1,0)

Deuxième observation

Le logarithme de la base est 1.

$$\log_c c = 1 \text{ car } c^1 = c$$

Coordonnée (c,1)

Troisième observation

Le logarithme de l'inverse de la base est -1.

$$\log_c 1/c = -1 \text{ car } c^{-1} = 1/c$$

Coordonnée (1/c,-1)

Quatrième observation

$\log_c 0$ n'existe pas. Donc $x = 0$ est une asymptote.

Exercice:

Calculer:

1. $\log_2 32 + \log_4 4 - \log_6 1$
2. $\log_5 5^6 + \log_4 4 \times 16 - \log_8 (1/8)$
3. $\log_2 30 - \log_2 5$

Solution:

1. $5 + 1 - 0 = 6$
2. $6 \times \log_5 5 + \log_4 4 + \log_4 16 - \log_8 (1/8) = 6 + 1 + 2 - (-1) = 10$
3. $\log_2 (30/5) = \log_2 6$ Avec la loi du changement de base $\Rightarrow \log 6 / \log 2 = 2,584962501$

Fonction logarithmique transformée

Les paramètres a,b,h,k agissent de la même façon sur la fonction logarithmique que sur une fonction réelle.

$$f(x) = a \log_c b(x-h) + k$$

si:

$a > 1$ Étirement vertical

$0 < a < 1$ rétrécissement vertical

-a réflexion par rapport à l'axe des X

$b > 1$ Étirement horizontal

$0 < b < 1$ rétrécissement horizontal

-b réflexion par rapport à l'axe des Y

$h > 0$ Translation vers la droite de h unités

$h < 0$ Translation vers la gauche de h unités

$k > 0$ Translation vers le haut de k unités

$k < 0$ Translation vers le bas de k unités

$x = h$ est l'asymptote.

Résolution d'une fonction logarithmique

Pour résoudre une équation logarithmique, il y a une méthode en 5 points à utiliser.

1. Déterminer les restrictions (car $\log 0$ n'existe pas)
2. Écrire l'équation à l'aide d'un seul logarithme (bref $a=1$ et $k = 0$).
3. Transformer l'équation sous la forme exponentielle.
4. Déterminer la ou les valeur(s) de X.
5. Valider la ou les solution(s) par rapport aux restrictions.

Exemple:

Résoudre $2\log_3(2(x+5)) = 6$

Voici les étapes.

1. $2(x+5) > 0 \Rightarrow x > -5$
2. $2\log_3(2(x+5)) = 6 \Rightarrow \log_3(2(x+5)) = 3$ (à gauche de l'équation, $a = 1$ et $k = 0$)
3. $3^3 = 2(x+5)$
4. $27 = 2x + 10 \Rightarrow 27 - 10 = 2x \Rightarrow 2x = 17 \Rightarrow x = 8,5$
5. Vérifions $x > -5$. Est-ce que $8,5 > -5$? Oui

Donc $x = 8,5$