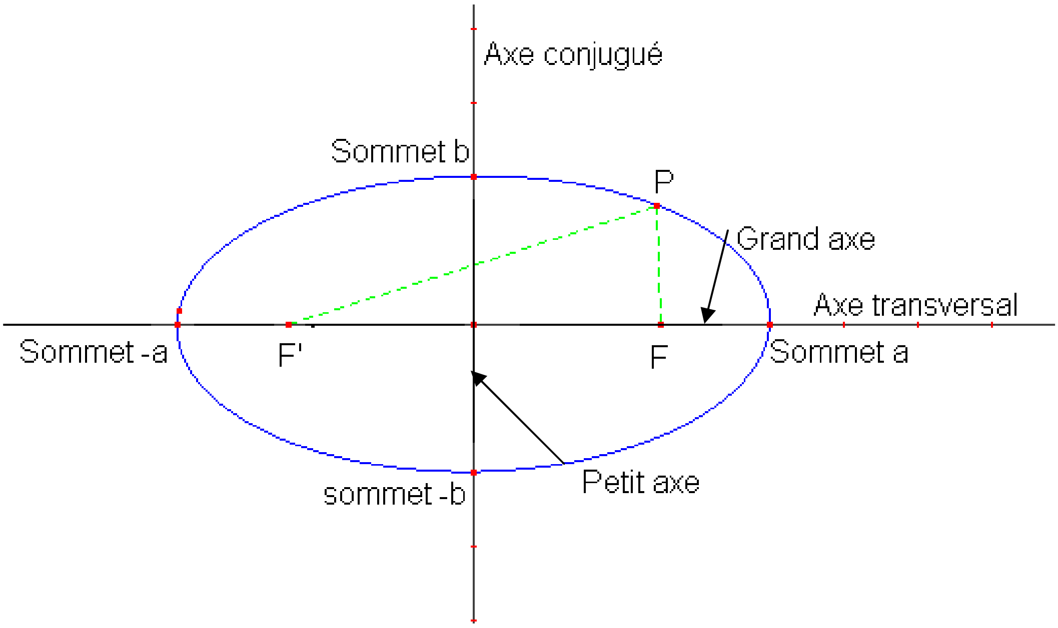
Les coniques

Troisième conique : **L'ellipse**

Les caractéristiques de l'ellipse de centre (0,0)



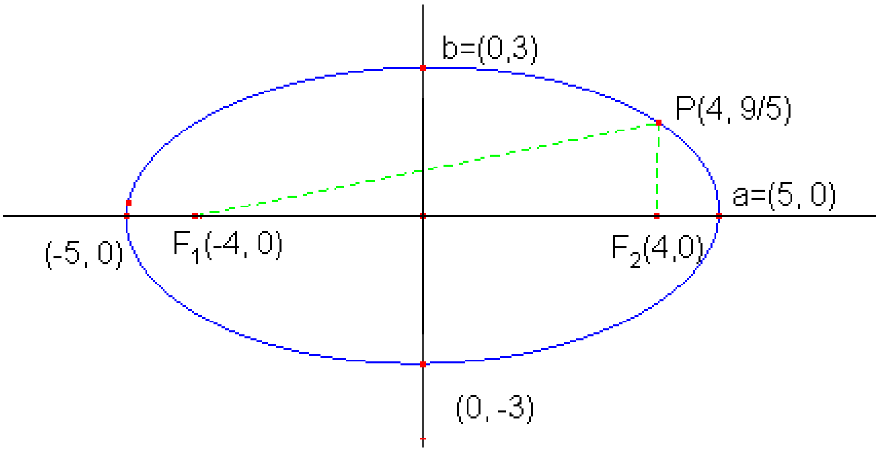
Définition :
Une ellipse est le lieu d'un point dont la somme des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante.

Donc, d(P, F) + d(P, F') = K

Centre de l'ellipse : point milieu du segment joignant les 2 foyers.
Axe transversal : droite qui passe par les foyers.
Axe conjugué : droite perpendiculaire à l'axe transversal passant par le centre.
Sommet : chacune des intersections de l'ellipse avec ses axes.
Grand axe : segment de l'axe transversal qui relie les deux sommets.
Petit axe : segment de l'axe conjugué qui relie les deux sommets.

Si les foyers sont sur l'axe des x, K = 2a
Si les foyers sont sur l'axe des y, K = 2b

Exemple :
Calculer les distances entre un point et les deux foyers pour les points a, b et P.:



Avec le point b : b(0, 3) ➔ d(b, F2) + d(b, F1) = K
Avec la formule de la distance,

$$\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2}+\sqrt{(0--4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}+\sqrt{16+9}=5+5=10$$

Avec le point a : a(5, 0) ➔ d(a, F2) + d(a, F1) = K
Avec la formule de la distance,

$$\sqrt{(5-4)^2+(0-0)^2}+\sqrt{(5--4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1}+\sqrt{81}=1+9=10$$

Avec le point P : P(4, 9/5) ➔ d(P, F2) + d(P, F1) = K
Avec la formule de la distance,

$$\sqrt{(4-4)^2+(\frac{9}{5}-0)^2}+\sqrt{(4--4)^2+(\frac{9}{5}-0)^2}=\sqrt{\frac{81}{25}}+\sqrt{64+\frac{81}{25}}=\frac{9}{5}+\sqrt{\frac{1681}{25}}=\frac{9}{5}+\frac{41}{5}=10$$

Donc, on remarque que la distance est toujours égale à 10.
Quel est la distance entre les points –a et a? 10
Alors, K = 2a.

La mesure du grand axe est toujours égale à la somme des distances aux foyers.

<u>L'équation de l'ellipse.</u>

L'équation canonique de l'ellipse centrée à l'origine dont les sommets se trouvent à (-a, 0), (a, 0), (0, -b) et (0, b) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Pour trouver cette formule, il suffit de faire le calcul suivant :
Un point P(x, y) sur l'ellipse.
d(P, F) + d(P, F') = 2a

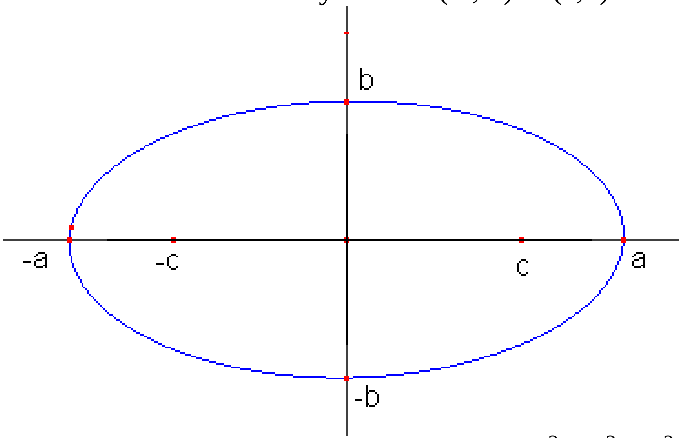
Forme générale :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \;\Rightarrow\; b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0 \;\Rightarrow$$

$Ax^2 + By^2 + C = 0$ (A et B sont toujours POSITIFS et C est toujours NÉGATIF)

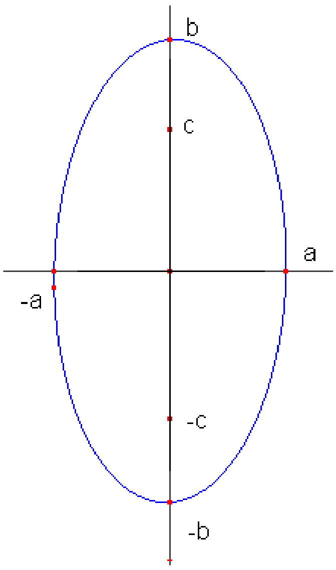
La position des foyers dépend de l'Axe transversal.

1- Axe transversal horizontal
   Les coordonnées des foyers sont (-c, 0) et (c,0)



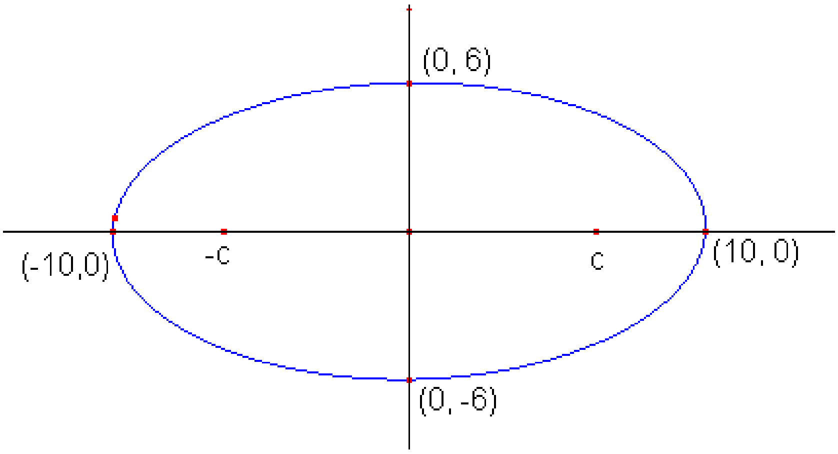
On peut trouver les valeurs avec la formule $c^2 = a^2 – b^2$

2- Axe transversal vertical
   Les coordonnées des foyers sont (0, -c) et (0, c)



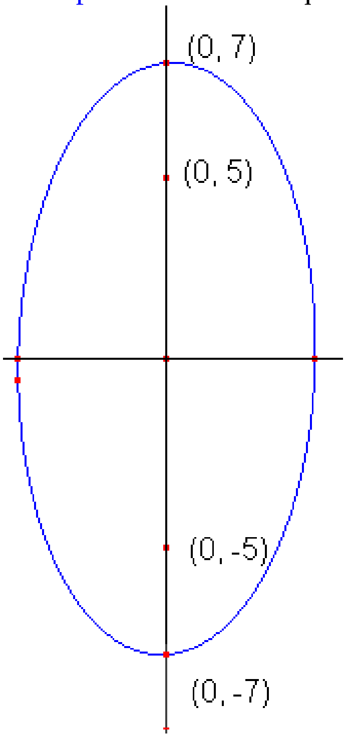
On peut trouver les valeurs avec la formule $c^2 = b^2 – a^2$

Exemple 1 : Donner l'équation de l'ellipse



a=10 et b=6 ➔ $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

Exemple 2 : Donner l'équation de l'ellipse



b=7. Il faut trouver a. ➔ $c^2 = b^2 - a^2$ ➔ $5^2 = 7^2 - a^2$ ➔ $25 = 49 - a^2$ ➔ $a^2 = 24$

$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$

Exemple 3 : Trouver les coordonnées des sommets et des foyers.

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{40}=1$$

a=8 et b=$\sqrt{40}$
$c^2 = a^2 - b^2$ ➔ $c^2 = 64 - 40$ ➔ $c^2 = 24$ ➔ $c = \sqrt{24}$
Coordonnées : (8, 0), (-8, 0), (0, $\sqrt{40}$), (0, -$\sqrt{40}$), ($\sqrt{24}$, 0) et (-$\sqrt{24}$, 0)

Exemple 4: Donner la forme générale.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

On va multiplier par 9x16. ➔ $9*16\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\right)$ ➔ $16x^2 + 9y^2 = 144$
➔ $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$

Optionnel

Page suivante

<u>Ceci n'est pas au programme</u>

L'équation canonique de centre (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Pour une ellipse d'axe vertical horizontal :
Les sommets seront donc à (a+h, k) (-a+h, k) et (h, b+k) (h, -b+k)

Exemple :

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$ Le centre de l'ellipse est (3, -2)

Les sommets seront donc à
(a+h, k) → (5+3,-2) → (8,-2)
(-a+h, k) → (-5+3,-2) → (-2,-2)
(h, b+k) → (3, 4+-2) → (3, 2)
(h, -b+k) → (3, -4+-2) → (3, -6)