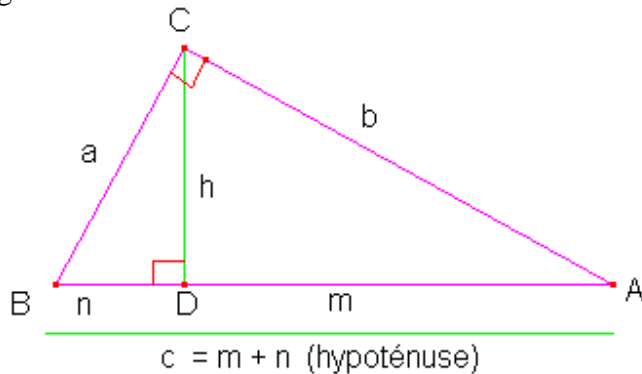


Géométrie

Théorème des relations métriques dans le triangle rectangle

On distingue quatre relations métriques à partir du triangle rectangle suivant :

Figure 1



Pour que cela fonctionne, je dois avoir absolument TROIS triangles rectangles : un petit, un moyen et un grand.

1. **La mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle à sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.**

Cathète a

Preuve : comparons les triangles ABC et BCD

Tableau 1

Affirmations	Justification
L'angle B	C'est le même angle pour le triangle ABC et BCD
L'angle BDC et ADC	C'est un angle droit
Les triangles ABC et BCD sont semblables	Par le cas de similitude A-A

Donc, nous pouvons faire la proportion de côté homologue.

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC} \rightarrow BC^2 = BD \times BA \rightarrow BC = \sqrt{BD \times BA} \rightarrow a = \sqrt{nc}$$

Formule importante: $a = \sqrt{nc}$

Cathète b

Preuve : comparons les triangles ABC et ACD

Tableau 2

Affirmations	Justification
L'angle A	C'est le même angle pour le triangle ABC et ACD
L'angle ADC et ACB	C'est un angle droit
Les triangles ABC et ACD sont semblables	Par le cas de similitude A-A

Donc, nous pouvons faire la proportion de côté homologue.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC^2 = AD \times AB \rightarrow AC = \sqrt{AD \times AB} \rightarrow b = \sqrt{mc}$$

Formule importante: $b = \sqrt{mc}$

2. La mesure de la hauteur issue de C est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments sur l'hypoténuse.

Hauteur h

Preuve : comparons les triangles ACD et BCD

Affirmations	Justification
L'angle BCD = L'angle CAD	Les triangles BCD et ABC sont semblables (voir tableau 1). Donc, l'angle BCD est homologue et congru à l'angle CAD.
L'angle BDC = L'angle ACD	Ce sont deux angles droits car le segment CD est une hauteur.
Les triangles ACD et BCD sont semblables.	Par le cas de similitude A-A

Donc, nous pouvons faire la proportion de côté homologue.

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD} \rightarrow CD^2 = AD \times BD \rightarrow CD = \sqrt{AD \times BD} \rightarrow h = \sqrt{mn}$$

Formule importante: $h = \sqrt{mn}$

3. Le produit de l'hypoténuse et la hauteur est égal au produit des cathètes.

Si on se concentre sur le grand triangle rectangle ABC, il y a deux façons de calculer son aire.

$$\text{Aire d'un triangle} \rightarrow \frac{bxh}{2}$$

Première façon : on considère les cathètes comme base et hauteur.

$$A = \frac{AC \times BC}{2}$$

Deuxième façon : on considère l'hypoténuse comme base et on a déjà sa hauteur

$$A = \frac{AB \times CD}{2}$$

Maintenant, les deux formules d'aire donnent le même résultat

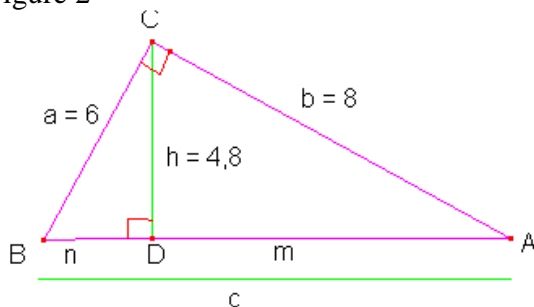
$$\frac{AC \times BC}{2} = \frac{AB \times CD}{2} \rightarrow AC \times BC = AB \times CD \rightarrow ab = ch$$

Formule importante: $ab = ch$

Exemple :

Trouvons la mesure c.

Figure 2



En prenant la formule $ch = ab$, cela donne
 $\rightarrow c \times 4,8 = 6 \times 8 \rightarrow c \times 4,8 = 48 \rightarrow c = 10$

Nous avons que $c = 10$.

Trouvons n.

En prenant la formule $a = \sqrt{nc}$, cela donne
 $\rightarrow 6 = \sqrt{n \times 10} \rightarrow 36 = n \times 10$ (en élevant chaque côté au carré)
 $\rightarrow n = 3,6$

Trouvons m.

On sait que $n + m = c$ selon la figure 2.

$$3,6 + m = 10 \rightarrow m = 6,4$$

On peut vérifier avec deux formules :

a. Soit avec la formule $b = \sqrt{mc}$.

$$8 = \sqrt{m * 10} \rightarrow 64 = m * 10 \text{ (en élevant chaque côté au carré)}$$
$$m = 6,4.$$

b. Soit avec la formule $h = \sqrt{mn}$

$$4,8 = \sqrt{m * 3,6} \rightarrow 23,04 = m * 3,6 \text{ (en élevant chaque côté au carré)}$$
$$m = 6,4$$